PRIMEIRO PRINCÍPIO DA INDUÇÃO E O PRINCÍPIO DA BOA ORDENAÇÃO: APLICAÇÕES E EQUIVALÊNCIA

THE FIRST PRINCIPLE OF INDUCTION AND THE PRINCIPLE OF GOOD ORDER: APPLICATIONS AND EQUIVALENCE

Artigo de Original

Edvalter da Silva Sena Filho [1]

https://orcid.org/0000-0000-0000-0000

Tiago Camelo Sousa [2]

https://orcid.org/0000-0000-0000-0000

Carlos Eduardo Soares de Maria [3]

https://orcid.org/0000-00030-0000-0000

Davi Ribeiro dos Santos [4]

https://orcid.org/0000-0000-0000-0000

Essentia
Revista de Cultura, Ciência e Tecnologia
www.uvanet.br/essentia

Resumo

Problemas matemáticos que envolvem propriedades relativas a conjuntos numéricos são comuns em olimpíadas de matemática como, por exemplo, a Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP). Nessa perspectiva, a participação dos autores no Programa de Iniciação Científica Júnior da OBMEP - PIC OBMEP da Universidade Estadual Vale do Acaraú (UVA) e o contato rotineiro com problemas que se encaixam na descrição acima induz o desejo em investigar, de modo mais qualitativo, algumas das ferramentas que são utilizadas para a resolução de tais problemas. Diante disso, o presente trabalho tem como objetivo enunciar e demonstrar algumas propriedades referentes a números naturais tomando como principais ferramentas de demonstração o Princípio da Indução Finita (PPI) e o Princípio da Boa Ordenação (PBO), bem como a equivalência entre estes princípios.

Palavras-chave: Princípio da Boa Ordem, Princípio da Indução, Equivalência entre PBO e PPI.

Abstract

Mathematical problems involving properties related to numerical sets are common in mathematics competitions, such as the Brazilian Public School Mathematics Olympiad (OBMEP). In this perspective, the authors' participation in the Junior Scientific Initiation Program of OBMEP - PIC OBMEP at Vale do Acaraú State University (UVA) and the routine exposure to problems fitting the description above stimulate the desire to investigate, in a more qualitative manner, some of the tools used to solve such problems. Therefore, the present work aims to state and demonstrate some properties related to natural numbers, taking the Principle of Finite Induction (PFI) and the Principle of Well-Ordering (PWO) as the main demonstration tools, as well as the equivalence between these principles.

Keywords: *Principle of Good Order, Principle of Induction, Equivalence between PBO and PPI.*

[1]Bacharel em Matemática. Docente do curso de matemática da Universidade Estadual Vale do Acaraú. Sobral. Ceará. Brasil.

INTRODUÇÃO

O Programa de Iniciação Científica Júnior (PIC) da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) visa transmitir aos alunos cultura matemática básica e treiná-los no rigor da leitura e da escrita de soluções e resultados, nas técnicas e métodos, na independência do raciocínio analítico, entre outros (OBMEP, s.d.).

Nos encontros do programa são abordados, dentre outros assuntos, problemas que tangem propriedades relativas a números naturais. Tais propriedades são recorrentes em competições olímpicas de matemática como, por exemplo: OBMEP, a Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM), a Olimpíada Canguru de Matemática, a Olimpíada Cearense de Matemática (OCM), a Olimpíada Brasileira de Informática (OBI) e até mesmo a Olimpíada Internacional de Matemática (IMO),

As demonstrações dos resultados matemáticos podem demandar um aporte significativo de engenhosidade e criatividade, a depender do resultado que se quer demonstrar. Muitas propriedades referentes ao conjunto dos números naturais ou um subconjunto específico dele podem ser demonstradas por meio de uma ferramenta matemática conhecida como Primeiro Princípio da Indução (PPI). Esse resultado está implicitamente presente sempre que dizemos "e assim por diante", "e assim sucessivamente".

Outro princípio de grande relevância chama-se Princípio da Boa Ordenação ou Princípio da Boa Ordem (PBO) que também assume protagonismo nas demonstrações de propriedades referentes a números naturais. Mostrar-se-á, na parte final desse trabalho, que esses dois princípios são equivalentes. Dessa forma, espera-se que esse trabalho possa servir de suporte para alunos que almejam participação em olimpíadas científicas.

O princípio da indução

O Princípio da Indução é amplamente usado para provar teoremas e propriedades em matemática, especialmente quando se trata de afirmações que têm uma estrutura recursiva ou são aplicáveis a todos os números naturais. Conforme destaca Lima (1998)

> O Princípio da Indução é um eficiente instrumento para a demonstração de fatos referentes aos números naturais. Por isso deve-se adquirir prática em sua utilização. Por outro lado, é importante também conhecer seu significado e sua posição dentro do arcabouço da Matemática. Entender o Princípio da Indução é praticamente o mesmo que entender os números naturais (Lima, 1998, p.26).

As demonstrações são usadas para validar a veracidade de afirmações matemáticas. Elas permitem estabelecer de forma rigorosa e lógica, que uma afirmação é verdadeira, o que é essencial para a construção do conhecimento matemático. De acordo com Balacheff (1988, apud

Silval; Savioli, 2012, p.128) "há dois tipos de prova: as provas pragmáticas que consistem em ações ou 'mostrações' e as provas conceituais que se caracterizam por formulações de propriedades e as possíveis relações entre elas".

Essa distinção entre provas pragmáticas e provas conceituais é importante, pois enfatiza a evolução da compreensão matemática, incentivando os estudantes a progredir em direção a uma compreensão mais profunda e conceitual da matemática, em vez de depender exclusivamente de abordagens práticas.

De acordo com Silva e Savioli (2012), Balacheff (1988) apresenta contribuições significativas para a área de educação matemática ao discutir a existência de alguns níveis de provas pragmáticas e provas conceituais em seu trabalho. Esses níveis de provas podem ser classificados da seguinte maneira.

Figura 1: Níveis de provas de acordo com Balacheff (1988, apud SILVA e SAVIOLI, 2012, p.128)

Fonte: Elaborada pelos autores

Esses níveis representam uma progressão da compreensão matemática, partindo de uma abordagem mais prática e empírica até uma compreensão mais abstrata e conceitual. O trabalho de Balacheff (1988) destaca a importância de promover o desenvolvimento dos estudantes através desses níveis, visando uma compreensão mais profunda e significativa da matemática, conforme Silva e Savioli (2012).

Quadro 1: Definição dos níveis de provas apresentadas por Balacheff (1988)

Empirismo Ingênuo	Sugere que o conhecimento é adquirido principalmente por meio da observação direta, após a verificação de alguns casos
Experimento Crucial	Refere-se a um experimento que é projetado para testar uma teoria ou hipótese de maneira decisiva, ou seja, um experimento que tem o potencial de confir-
Exemplo Genérico	É um exemplo que representa um conceito, categoria ou classe de objetos. Ele não se refere a um exemplo específico, mas sim a uma descrição geral que se
Experimento de Pensamento	É a técnica que envolve imaginar uma situação hipotética para explorar implicações lógicas, testar hipóteses ou entender conceitos

Fonte: Adaptada de Silva e Savioli (2012, p.128).

A compreensão dos níveis de provas pode ajudar a escolher a abordagem mais apropriada e pode contribuir na escolha do percurso a ser percorrido. Assim, os educadores podem usar esse conhecimento para planejar estratégias de ensino que ajudem os estudantes a progredir de provas pragmáticas para provas conceituais. Isso pode melhorar o processo de aprendizado e promover uma compreensão mais profunda dos conceitos.

MATERIAL E MÉTODOS

Assumindo que o leitor tenha entende as ideias básicas da linguagem dos conjuntos, inicia -se uma explanação, evocando o Princípio de Indução, comumente utilizado em demonstrações de muitas propriedades referentes à conjunto de números naturais.

Primeiro Princípio da Indução (PPI). Se $X \subset \mathbb{N}$ é um subconjunto tal que $1 \in X$, e para todo $n \in X$ tem-se também $s(n) = n + 1 \in X$, então $X = \mathbb{N}$.

Este princípio também pode ser enunciado da seguinte maneira: *Seja P uma propriedade referente a números naturais. Se 1 gozar da propriedade P e se, do fato de um número n gozar de P puder-se concluir que $n + 1$ goza da propriedade P, então todos os números naturais gozam dessa propriedade.*

Problema 1. *(Primos de Fermat)* No ano de 1.640 o francês Pierre de Fermat acreditava ter encontrado uma fórmula $f(n) = 2^{2^n} + 1$, que só fornecia números primos. A fórmula funciona para os 5 primeiros casos, a saber: $f(0) = 3, f(1) = 5, f(2) = 17, f(3) = 257$ e $f(4) = 65.537$. Entretanto, Leonhard Euler (1707-1783) mostra que $f(5) = 4.294.967.297 = 641 \cdot 6.700.417$ seria um número composto, conforme Ferreira (2018).

Problema 2. O Pequeno Teorema de Fermat, enunciado por Pierre de Fermat (1607-1665), garante que, se p é um número primo e a é um número inteiro, não múltiplo de p, então $a^{p-1} - 1$ é múltiplo de p. Isto é, existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que $a^{p-1} - 1 = m \cdot p$. De acordo com Ferreira (2018), Dimitry Grave (1863-1939) tenta mostrar algo próximo. Ele tentou provar que para todo número primo p, o número $2^{(p-1)} - 1$ não era divisível por p^2. O interessante nesse caso é que essa conjectura funciona para todos os primos menores do que 1.000 (mil). Para o número primo $p = 1.093$, tem-se que $2^{1.092} - 1$ será divisível por 1.093^2.

Os problemas descritos acima servem para reforçar a importância do Princípio da Indução, pois o mesmo prova que uma afirmação é verdadeira para todos os números naturais. Isso é crucial na matemática, pois muitas teorias e teoremas envolvem propriedades que se aplicam a uma infinidade de termos. Em outras palavras, esse Princípio é essencial para estabelecer a validade de afirmações matemáticas que se aplicam a uma infinidade de casos.

Um segundo princípio, relativo ao conjunto dos números naturais, ressalta uma ordenação inerente a qualquer subconjunto próprio, de tal forma que sempre é possível obter o menor elemento. Trata-se do Princípio da Boa ordenação, cujo enunciado se apresenta da seguinte forma:

Princípio da Boa Ordenação (PBO). Todo subconjunto $\mathrm{A} \subset \mathbb{N}$, não vazio, possui um elemento mínimo.

Esse princípio pode ser utilizado em demonstrações de diversos resultados e existe uma forma, em símbolos matemáticos, de reescrevê-lo:

$$S \subseteq \mathbb{N}, S \neq \emptyset \Rightarrow \exists\, n_0 \in S \,; n_0 \leq n, \forall\, n \in S,$$

O que pode ser lido como: Se S é um subconjunto dos números naturais, diferente de vazio, então existe, em S, um número n_0 que é menor que qualquer outro elemento de S. Esse resultado é frequentemente utilizado na teoria dos números, como por exemplo: para provar a existência de soluções para equações diofantinas (equações com coeficientes inteiros); além de estabelecer propriedades sobre números inteiros, como a divisibilidade.

Problema 3. *(Equações Diofantinas)* Sejam $a, b \in \mathbb{N}$ e $mdc(a,b) = d$. Então, existem $m, n \in \mathbb{Z}$ tais que $d = am + bn$.

Defina o conjunto $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x = am + bn,\ onde\ m, n \in \mathbb{Z}, e\ x > 0\}$. Primeiramente note que o conjunto $A \neq \emptyset$. A saber, basta tomar $m = a$ e $n = b$, logo $x = a^2 + b^2 \in \mathbb{N}$. Ou seja, o conjunto A não é vazio. Pelo Teorema da Boa Ordenação, tem-se que existe um elemento mínimo $k_0 \in A$. Agora, se provará que $k_0 = mdc(a,b)$. Dividindo a por k_0 tem-se, pelo algoritmo da divisão, que existem $q, r \in \mathbb{Z}$, com $0 \leq \mathrm{r} < k_0$, tais que $a = qk_0 + r$. Como $k_0 \in A$, temos que

$$\exists\, m_0, n_0 \in \mathbb{Z} \text{ tais que } k_0 = am_0 + bn_0. \qquad \text{(I)}$$

Portanto,

$$a = qk_0 + r \text{, e } k_0 = am_0 + bn_0.$$

Assim,

$$a = qk_0 + r \Rightarrow a = q(am_0 + bn_0) + r,$$

$$a = qam_0 + qbn_0 + \mathrm{r} \Rightarrow r = (1 - q\, m_0)a + (-qn_0)b.$$

Como $0 \leq r < k_0$, tem-se apenas duas possibilidades. Caso $0 < r < k_0$, tem-se $r \in A$, o que gera um absurdo, pois isso contraria a minimalidade do elemento $k_0 \in A$. Portanto, tem-se que $r = 0$, e consequentemente, $a = q \cdot k_0$. De modo análogo, mostra-se que $b = p \cdot k_0$. Por fim, apresenta-se que k_0 é o maior divisor comum de a e b. Seja c um outro divisor comum de

a e b. Assim, existem $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$ tais que $a = m_1 c$ e $b = m_2 c$. Então, pela equação (I), deduz-se:

$$k_0 = am_0 + bn_0 \Rightarrow k_0 = (m_1 c)m_0 + (m_2 c)n_0 \Rightarrow k_0 = c(m_1 m_0 + m_2 n_0)$$

Portanto, c divide k_0. Logo, $k_0 = d = mdc(a, b)$.

Problema 4. *(Teorema Fundamental da Aritmética)* Seja $n \in \mathbb{N}$ um número natural maior ou igual a 2. Então, n é um número primo ou se escreve de modo único como um produto de números primos.

Considere P como sendo a propriedade descrita no Problema 4 e defina o conjunto $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ goza da propriedade } P\}$. O conjunto $X = \mathbb{N} - A \cup \{1\} \subset \mathbb{N}$ é vazio! Do contrário, pelo Princípio da Boa Ordenação, existiria um elemento mínimo $k_0 \in X$. Como $k_0 \notin A$, ele não será um número primo. Sendo assim, existem $n, m \in \mathbb{N}$, tais que $k_0 = m \cdot n$, com $0 < m < k_0$ e $0 < n < k_0$. Dessa forma, $n, m \in A$, uma vez que k_0 é o elemento mínimo. Disso decorre que, n e m gozam da propriedade P. Logo, k_0 também gozaria da propriedade P o que seria um absurdo. Quanto a unicidade, seja $n \in \mathbb{N}$ um número natural maior ou igual a 2. Suponha que existam números primos $p_1, p_2, \dots, p_r, q_1, q_2, \dots, q_k$, tais que

$$p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \dots p_r = n = q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 \dots q_k$$

Como p_1 é primo, temos que divide algum q_j, para algum $j = 1, \dots, k$. Como q_j também é primo, temos que $p_1 = q_j$, para algum $j = 1, \dots, k$. Portanto, a menos de uma reordenação, tem-se $p_1 = q_1$. Agora, elimine p_1 em ambos os lados da equação. Assim,

$$p_2 \cdot p_3 \dots p_r = n = q_2 \cdot q_3 \dots q_k$$

Seguindo de maneira indutiva, conclui-se que $r = k$ e $p_j = q_j$ para todo $j = 1, \dots, k$.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Equivalência entre o PPI e o PBO

Nessa seção, mostra-se a equivalência entre o Primeiro Princípio da Indução e o Princípio da Boa Ordem. Assuma como verdade o PPI, e veja que o PBO é válido. Com efeito, seja $A \subset \mathbb{N}$, um subconjunto não-vazio. Usando a notação $I_n = \{p \in \mathbb{N}, 1 \leq p \leq n\}$, considere o conjunto $X \subset \mathbb{N}$, formado pelos números $n \in \mathbb{N}$ tais que $I_n \subset \mathbb{N} - A$. Assim, dizer que $n \in X$ significa afirmar que $n \notin A$ e que todos os números naturais menores do que n também não pertencem a A. Se $1 \in A$, o resultado estará demonstrado pois 1 será o menor elemento de A. Se $1 \notin A$ então $1 \in X$. Mas, note que $X \neq \mathbb{N}$, pois $X \subset \mathbb{N} - A$ e $A \neq \emptyset$. Assim X cumpre a primeira parte da hipótese do PPI ($1 \in X$), mas não satisfaz a conclusão do PPI, já que não é igual a $\mathbb{N}$. Logo, não pode cumprir a segunda parte da hipótese. Isto é, deve existir algum $n_0 \in X$ tal que $n_0 + 1 \notin X$. Portanto, todos os inteiros até n_0 pertencem ao complementar de A, mas $n_0 + 1$ pertence a A. Desta maneira, $n_0 + 1$ é o menor elemento do conjunto A, o que demonstra a primeira parte da equivalência.

Por outro lado, considere válido o PBO. Seja $X \subset \mathbb{N}$ um conjunto, onde $1 \in X$ e, além do mais, dado qualquer $n \in X$ tem-se $n + 1 \in X$. Mostrar-se-á que $X = \mathbb{N}$. Suponha, por absurdo, que $X \neq \mathbb{N}$. Então, tem-se que $\mathbb{N} - X \neq \emptyset$. Sendo assim, pelo PBO, o conjunto $\mathbb{N} - X$ possuirá um elemento n_0 que será o seu elemento mínimo e, dessa maneira, tem-se $n_0 - 1 \in X$. Do contrário, não seria n_0 elemento mínimo. Pela hipótese feita sobre conjunto X, deve-se verificar que $(n_0 - 1) + 1 = n_0 \in X$, mas dessa forma, conclui-se que $n_0 \in X$, o que seria um absurdo, pois $n_0 \in \mathbb{N} - X$. Assim, conclui-se que $X = \mathbb{N}$.

Problema 5 (OBM 2008). Vamos chamar de garboso o número que possui um múltiplo cujas quatro primeiras casas de sua representação decimal são 2008. Por exemplo, 7 é garboso pois 200858 é múltiplo de 7 e começa com 2008. Observe que $200858 = 28694 \times 7$. Mostre que todos os inteiros positivos são garbosos.

O problema 5 se trata de uma afirmação que deve ser validada para todo número natural. Será apresentada uma demonstração utilizando o PBO. O número natural n goza da propriedade P se, e somente se, o número n for garboso. Defina o conjunto $X = \{n \in \mathbb{N} \mid \text{n } goza\ da\ propriedade\ P\}$. Note que, $1{,}2{,}3 \in X$. A saber,

$$1 \times 2.008 = \mathbf{2.008};\ \ 2 \times 1.004 = \mathbf{2.008};\ \ 3 \times 66.940.027.336 = \mathbf{200.8}20.082.008$$

O conjunto $\mathbb{N} - X \subset \mathbb{N}$ será vazio! Do contrário, pelo PBO, existiria um elemento $n_0 \in \mathbb{N} - X$ mínimo. Defina uma sequência de números naturais $(\mathrm{a_n})_{\mathrm{n} \in \mathbb{N}}$ da seguinte maneira;

$$a_n = \sum_{j=1}^{n} 2.008 \times 10^{4\mathrm{j}-4} = 2.008 + 2.008 \times 10^4 + \cdots + 2.008 \times 10^{4\mathrm{n}-4}.$$

Isto é,

$$a_1 = 2.008;\ a_2 = 2.008 + 2.008 \times 10^4;\ a_3 = 2.008 + 2.008 \times 10^4 + 2.008 \times 10^8.$$

A sequência $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admite infinitos termos. Pelo Princípio das Casas dos Pombos, existem números naturais $\mathrm{r, p} \in \mathbb{N}$ distintos, tais que $a_r \equiv a_p\ mod(n_0)$. Assim, existe $m \in Z$, tal que $a_r - a_p = m \times \mathrm{n_0}$. Sem perda da generalidade, suponha $p < r.$ Portanto,

$$m \times \mathrm{n_0} = a_r - a_p$$

$$= \sum_{j=1}^{r} 2.008 \times 10^{4j-4} - \sum_{j=1}^{p} 2.008 \times 10^{4j-4}$$

$$= \sum_{j=p+1}^{r} 2.008 \times 10^{4j-4}$$

Assim, n_0 seria um número garboso. Absurdo!

CONSIDERAÇÕES FINAIS

As olimpíadas de matemática geralmente buscam avaliar a capacidade dos participantes de construir argumentos matemáticos sólidos, em cima dos problemas propostos. O Primeiro Princípio da Indução e o Princípio da Boa Ordenação fornecem uma estrutura lógica para esses argumentos e são, portanto, ferramentas valiosas para os competidores possuírem.

A equivalência entre esses dois princípios possibilita o estudante a escolher a melhor abordagem para provar proposições e resolver problemas, dependendo do contexto. Essa flexibilidade é fundamental para a resolução de uma ampla gama de problemas matemáticos e demonstra a importância desses princípios na teoria matemática.

REFERÊNCIAS

ALENCAR FILHO, E. A. *Teoria Elementar dos Conjuntos*. 19. ed. São Paulo: Nobel, 1980.

AVILA, G. S. S. *Análise matemática para licenciatura*. 3. ed. São Paulo: Blucher, 2006.

BALACHEFF, N. Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics. In: PIMM, David (Ed.). *Mathematics Teachers and Children*. London: Hodder and Stoughton. p. 216 – 229, 1988.

FERREIRA, L. G. *Princípio de Indução e Aplicações*. Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional-PROFMAT. Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás-IME/UFG. 2018.

LANDAU, E. *Teoria Elementar dos Números*. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2002.

LIMA, E. L. O Princípio da Indução. Eureka! - *A Revista da Olimpíada Brasileira de Matemática*, Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, n. 3, p. 26-43, 1998.

LIMA, E. L. *Análise Real:* Funções de uma variável. 12. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2016.

LIMA, E. L. *Curso de Análise*. 7. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2016.

OBMEP. *Programa de Iniciação Científica Jr*. Disponível em: https://www.obmep.org.br/pic.htm.